УДК 539.3

РОЗПОДІЛ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА З НЕОДНОРІДНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Т. Бубняк, к.ф.-м.н., О. Говда
Львівський національний аграрний університет

Ключові слова: потенціальні функції, трансверсально-ізотропне середовище, неідеальний контакт, сфероїд, поля напружень і термонапружень.

У роботі розглядається задача про розподіл термонапружень трансверсально-ізотропного середовища, яке містить анізотропне включення у формі стиснутого сфероїда за рівномірного нагрівання.

Постановка проблеми. Багато конструкцій сучасних споруд містять деталі, виготовлені з анізотропних матеріалів. Такими матеріалами є різні склопластики, пластмаси тощо. Питання міцності матеріалів та елементів конструкцій потребують доповнення інформацією про досягнення компонентами напружено-деформівного стану екстремальних значень у певних зонах.

Поява неоднорідностей в одних випадках зумовлена технологією виробництва, в інших – неоднорідність вводиться для досягнення оптимальної комбінації міцнісних властивостей конструкції. Отримання достовірної та повної інформації про розподіл напружень у матеріалах чи елементах конструкцій з урахуванням реальної картини міжфазної взаємодії пов’язано з використанням ефективних методів розв’язку просторових задач теорії пружності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження просторових задач статичної теорії пружності і термопружності для однорідних ізотропних та анізотропних тіл у загальній постановці пов’язане з великими математичними труднощами через складність побудови розв’язку системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, який задовольняє граничні умови.

Одним з ефективних методів розв’язку задач теорії пружності є метод Фур’є, який базується на поданні загальних розв’язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції.

Важливі результати в цьому напрямі отримані в роботах В.Т. Грінченка, Ф.Д. Коваленка, Ю.М. Коляно, В.Л. Рвачова, І.О. Мотовиловця, К.В. Солянік-Красса, Я.С. Підстригала, Ю.М. Подільчука та багатьох інших, в яких побудовані точні розв’язки просторових задач теорії пружності і статичної термопружності у сферичній, циліндричній, сфероїдальній, параболічній та інших системах координат.

Постановка завдання. Ми розглядаємо задачу про розподіл термонапружень трансверсально-ізотропного середовища, яке містить анізотропне включення у формі стиснутого сфероїда за рівномірного нагрівання.

Виклад основного матеріалу. Дослідимо термонапружений стан трансверсально-ізотропного середовища з включенням у формі витягнутого сфероїда у разі дії лінійного теплового потоку

$$T_0 = -g_0(\alpha x + \beta y + \gamma z) + d\,, \qquad (1)$$

де α, β, γ – напрямні косинуси кутів теплового потоку з осями координат, причому початок координат збігається з геометричним центром сфероїдального включення; g_0 – інтенсивність потоку.

Температуру в середовищі подамо у вигляді основного поля T_0 і додаткового T^*. Нехай $T_1, \lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2$ – відповідно температура і коефіцієнти, які характеризують теплофізичні властивості середовища; $T_2, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ – такі самі величини, які характеризують сфероїдальне включення.

Розглянемо крайову задачу

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta'' \frac{\partial^2}{z^2}\right](T_0 + T^*) = 0,\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} + \tilde{\beta}'' \frac{\partial^2 T_2}{z^2} = 0, \qquad (x, y, z) \in D,$$

(2)

$$\lambda_i (T_0 + T^*)_{,i}\, n_i = \tilde{\lambda}_i T_{2,i}\, n_i = \beta^*(T_2 - T_0 - T^*)\,, \quad (x, y, z) \in \partial D\,,$$

де D – область, яка зайнята включенням; ∂D – її границя, n_i – напрямні косинуси; і – диференціювання за відповідною змінною;
β" =λ/λ' – характеризує відношення коефіцієнтів теплопровідності для напрямку в площині XOY та напрямку вздовж осі Z у середовищі; $\tilde{\beta}$" – аналогічне значення для включення.

Розв’язок задачі (2) за умови неідеального теплового контакту зображаємо у вигляді тригонометричних рядів за приєднаними функціями Лежандра першого і другого родів [1]:

$$T^* = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} Q_n^{(m)}(q_n) \cdot P_n^{(m)}(p_n) \cdot \left(M_{nm} \cos\varphi + N_{nm} \sin\varphi\right). \quad (3)$$

Температура всередині включення буде

$$T_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} Q_n^{(m)}(q_n) \cdot P_n^{(m)}(p_n) \cdot \left(\tilde{M}_{nm} \cos\varphi + \tilde{N}_{nm} \sin\varphi\right).. \quad (4)$$

Невідомі сталі $M_{ij}, N_{ij}, \tilde{M}_{ij}, \tilde{N}_{ij}$ знаходимо з граничних умов задачі (2) та формул (1), (3), (4) шляхом розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь [2, 3]:

$$\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\left(-aa_4q_{40} + \frac{M_{11}}{Q_1^{(1)}(q_{40})} \cdot \frac{\partial Q_1^{(1)}(q_{40})}{\partial \eta_4}\right) = \sqrt{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2}\tilde{M}_{11}\frac{q_{40}}{\bar{q}_{40}} =$$
$$= \beta^*\left(\tilde{M}_{11} - M_{11} + aa_4\bar{q}_{40}\right),$$
$$\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\left(-ba_4q_{40} + \frac{N_{11}}{Q_1^{(1)}(q_{40})} \cdot \frac{\partial Q_1^{(1)}(q_{40})}{\partial \eta_4}\right) = \sqrt{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2}\tilde{N}_{11}\frac{q_{40}}{\bar{q}_{40}} =$$
$$= \beta^*\left(\tilde{N}_{11} - N_{11} + ba_4\bar{q}_{40}\right), \quad (5)$$
$$\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\left(c\lambda_4a_4\bar{q}_{40} + \frac{M_{10}}{Q_1(q_{40})} \cdot \frac{\partial Q_1^{(1)}(q_{40})}{\partial \eta_4}\right) = \sqrt{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2}\tilde{M}_{10}\frac{q_{40}}{\bar{q}_{40}} =$$
$$= \beta^*\left(\tilde{M}_{10} - M_{10} - c\lambda_4a_4q_{40}\right).$$

Розв’язок цієї системи дозволяє знайти розподіл термонапружень, враховуючи (3) і (4), як у середовищі, так і у включенні.

Висновки. У роботі описано розподіл термонапружень трансверсально-ізотропного середовища, яке містить таке саме включення, у разі дії лінійного температурного поля за умови неідеального контакту. На основі аналізу отриманих числових результатів виявлено низку особливостей, зумовлених порушенням умов спаю на границі розділу фаз, впливом температурних зусиль чи геометричних параметрів включення. За рівномірного нагрівання максимальні напруження досягаються на кінцях великої півосі еліпсоїда обертання. Для лінійного теплового потоку, який напрямлений вздовж осі симетрії, максимальні напруження досягаються на контурі еліпса, утвореного внаслідок перетину площини симетрії з еліпсоїдом обертання. Проте ріст напружень біля включення має локальний характер.

Бібліографічний список

1. Подильчук Ю. Н. Граничные задачи статики упругих тел / Ю. Н. Подильчук // Пространственные задачи теории упругости и пластичности : в 5 т. –К. : Наук. думка, 1984 – . – Т. 1. 1984. – 303 с.

2. Соколовський Я. І. Деформативність неоднорідних трансверсально-ізотропних матеріалів / Я. І. Соколовський, Т. І. Бубняк. – Львів : Львів. держ. аграр. ун-т, 1999. – 197 с.

3. Бубняк Т. І. Розподіл напружень у композитах при нагріві / Т. І. Бубняк // Екологічні, технологічні та соціально-економічні аспекти ефективного використання матеріально-технічної бази АПК : матеріали Міжнар. наук.-практ. форуму, 17-18 вересня 2008 р. – Львів, 2008. – С. 378 – 383.

Буняк Т., Говда О. Распределение термонапряжений трансверсально-изотропной среды с неднородным включением

В работе исследуется задача о распределении термонапряжений трансверсально-изотропной среды, которая содержит анизотропное включение в виде сжатого сфероида при равномерном нагревании.

Ключевые слова: потенциальные функции, трансверсально-изотропная среда, неидеальный контакт, сфероид, поля напряжений и термонапряжений.

Bubnyak T., Govda O. Distribution of thermostress of a transversally isotropic medium with inhomogeneous inclusion

The article deals with the problem of thermostress distribution in transversally isotropic medium, containing anisotropic inclusion of compressed spheroid, under uniform heating.

Key words: potential functions, transversally isotropic medium, contact, sphere, field of pressure.